CLARIO · FICHE DE COURS ET EXERCICES

La dérivation

Première | Spécialité mathématiques | Cours · Méthodes · 8 exercices corrigés

La dérivation est le chapitre central de la spécialité maths en Première : elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de trouver un maximum ou un minimum et d'écrire l'équation d'une tangente. Cette fiche réunit le cours complet, les formules, les méthodes, un exemple entièrement corrigé et 8 exercices progressifs avec corrigés détaillés.

Objectifs

- Comprendre le nombre dérivé comme limite d'un taux de variation et comme coefficient directeur d'une tangente.
- Calculer la dérivée d'une fonction avec les formules usuelles et les règles d'opérations.
- Écrire l'équation d'une tangente en un point.
- Étudier le signe de la dérivée pour en déduire les variations et les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.

Prérequis

- Coefficient directeur et équation réduite d'une droite : $y = mx + p$.
- Calcul littéral : développer, factoriser, réduire au même dénominateur.
- Signe d'une expression affine et d'un trinôme (voir la fiche sur le second degré).
- Tableau de signes et tableau de variations.

1. Le cours

1.1 Taux de variation et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à I. Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est :

$$\tau(h) = [f(a + h) - f(a)] \,/\, h$$

C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de la courbe d'abscisses a et $a + h$ (une « sécante »).

Définition. On dit que f est **dérivable en a** si $\tau(h)$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre est le **nombre dérivé de f en a**, noté **$f'(a)$** :

$$f'(a) = \lim\,(h \to 0)\ [f(a + h) - f(a)] \,/\, h$$

Exemple. Pour $f(x) = x^2$ et $a = 3$: $[(3 + h)^2 - 9] / h = (6h + h^2) / h = 6 + h$, qui tend vers 6 quand h tend vers 0. Donc $f'(3) = 6$.

1.2 Tangente à une courbe

Propriété. Si f est dérivable en a, la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite qui passe par A(a ; f(a)) et de coefficient directeur f′(a). Son équation est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Interprétation : la tangente est la droite qui « colle » le mieux à la courbe au voisinage de A. Si f′(a) = 0, la tangente est horizontale.

1.3 Fonction dérivée et dérivées usuelles

Si f est dérivable en tout réel x d'un intervalle I, la fonction qui à x associe f′(x) est la **fonction dérivée** de f sur I.

- f(x) = k (constante) → f′(x) = 0, sur $\mathbb{R}$
- f(x) = x → f′(x) = 1, sur $\mathbb{R}$
- f(x) = x^2 → f′(x) = 2x, sur $\mathbb{R}$
- f(x) = x^n (n entier ≥ 1) → f′(x) = $n \cdot x^{n-1}$, sur $\mathbb{R}$
- f(x) = 1/x → f′(x) = $-1/x^2$, sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$
- f(x) = √x → f′(x) = $1/(2\sqrt{x})$, sur $]0 ; +\infty[$ (la racine carrée n'est pas dérivable en 0)

1.4 Opérations sur les dérivées

u et v désignent des fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel.

- **Somme** : (u + v)′ = u′ + v′
- **Produit par un réel** : (k·u)′ = k·u′
- **Produit** : (u·v)′ = u′·v + u·v′
- **Inverse** (v ne s'annule pas sur I) : (1/v)′ = −v′ / v^2
- **Quotient** (v ne s'annule pas sur I) : (u/v)′ = (u′·v − u·v′) / v^2
- **Composée avec une fonction affine** : si g(x) = f(ax + b), alors g′(x) = a·f′(ax + b)

Démonstration de la formule du produit. Le taux de variation de uv entre x et x + h s'écrit [u(x + h)v(x + h) − u(x)v(x)] / h. En ajoutant et retranchant u(x)v(x + h) au numérateur, on obtient : [(u(x + h) − u(x)) / h]·v(x + h) + u(x)·[(v(x + h) − v(x)) / h]. Quand h tend vers 0, le premier terme tend vers u′(x)v(x) et le second vers u(x)v′(x).

1.5 Dérivée et variations

Théorème. Soit f dérivable sur un intervalle I.

- Si f′(x) ≥ 0 pour tout x de I (avec égalité seulement en des points isolés), f est **croissante** sur I.
- Si f′(x) ≤ 0 pour tout x de I (avec égalité seulement en des points isolés), f est **décroissante** sur I.
- Si f′(x) = 0 pour tout x de I, f est constante sur I.

Extremum local. Si f′ s'annule en a **en changeant de signe**, f admet un extremum local en a : un maximum si f′ passe de + à −, un minimum si f′ passe de − à +. Attention : f′(a) = 0 ne suffit pas. Pour f(x) = x^3, f′(0) = 0 mais f est croissante sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas d'extremum en 0.

2. Les formules à connaître

- Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] / h$
- Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; $(1/x)' = -1/x^2$; $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$
- $(uv)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$; $(1/v)' = -v'/v^2$
- $[f(ax + b)]' = a \cdot f'(ax + b)$
- $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante

3. Les méthodes à maîtriser

Méthode 1 — Calculer une dérivée sans se tromper

1. Identifier la **forme** de la fonction : somme, produit, quotient, composée avec une fonction affine.
2. Nommer clairement u et v, puis calculer u′ et v′ *à part*.
3. Appliquer la formule, puis simplifier : on factorise le plus possible, car c'est le signe de f′ qui nous intéresse ensuite.

Méthode 2 — Écrire l'équation d'une tangente

1. Calculer f(a).
2. Calculer f′(x), puis f′(a).
3. Remplacer dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et réduire sous la forme $y = mx + p$.

Méthode 3 — Étudier les variations d'une fonction

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité.
2. Calculer f′(x) et l'écrire sous forme factorisée (ou de quotient dont le dénominateur est positif).
3. Étudier le signe de f′(x) dans un tableau de signes.
4. En déduire le tableau de variations, en calculant les valeurs de f aux points où f′ s'annule.

Méthode 4 — Résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et son intervalle de valeurs possibles.
2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x.
3. Étudier les variations de cette fonction sur l'intervalle.
4. Conclure par une phrase qui répond à la question, avec l'unité.

4. Exemple entièrement corrigé

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer f′(x) et l'écrire sous forme factorisée.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

1. Dérivée. f est une somme de fonctions de référence, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et pour racines $(2 - 4)/2 = -1$ et $(2 + 4)/2 = 3$. Donc **$f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$**.

2. Variations. f′(x) est un trinôme de coefficient $3 > 0$: il est positif à l'extérieur de $[-1 ; 3]$ et négatif entre −1 et 3. Donc f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$.

On calcule $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ (maximum local) et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$ (minimum local).

3. Tangente en 0. $f(0) = 5$ et $f'(0) = 3 \times 1 \times (-3) = -9$. La tangente a pour équation $y = -9(x - 0) + 5$, soit **$y = -9x + 5$**.

Contrôle : $f'(0) = 3 \times 0^2 - 6 \times 0 - 9 = -9$ avec la forme développée. Les deux formes donnent le même résultat : on ne s'est pas trompé en factorisant.

5. Erreurs fréquentes et pièges

- **$(uv)' \neq u'v'$** : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.
- **Le signe de $(1/x)'$** : $(1/x)' = -1/x^2$, avec un signe moins.
- **L'ordre dans le quotient** : c'est $u'v - uv'$, et non $uv' - u'v$.
- **Oublier le facteur a** : la dérivée de $(2x - 3)^5$ est $10(2x - 3)^4$, pas $5(2x - 3)^4$.
- **Confondre f(a) et f'(a)** dans l'équation de la tangente.
- **Confondre le signe de f et le signe de f'** : c'est le signe de f' qui donne les variations de f.
- **Conclure trop vite à un extremum** : $f'(a) = 0$ ne suffit pas, il faut que f' change de signe.

6. Exercices progressifs

★ application directe · ★★ entraînement · ★★★ approfondissement / type épreuve

Exercice 1 ★ — Dérivées usuelles

Calculer la dérivée de : a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = 3/x$ sur $]0 ; +\infty[$; c) $h(x) = 5\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 2 ★ — Nombre dérivé par la définition

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$, puis en déduire $f'(3)$.

Exercice 3 ★★ — Produit et quotient

Calculer la dérivée de : a) $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; b) $g(x) = (3x - 1)/(x + 2)$ sur $]-2 ; +\infty[$.

Exercice 4 ★★ — Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 5 ★★ — Composée avec une fonction affine

Calculer la dérivée de : a) $f(x) = (2x - 3)^5$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \sqrt{(4x + 1)}$ sur $]-1/4 ; +\infty[$.

Exercice 6 ★★ — Étude de variations

Étudier les variations de $f(x) = x + 4/x$ sur $]0 ; +\infty[$ et préciser son extremum.

Exercice 7 ★★★ — Optimisation d'une boîte

Dans une plaque carrée de 30 cm de côté, on découpe dans chaque coin un carré de côté x cm, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle. a) Justifier que $0 < x < 15$ et que le volume vaut $V(x) = x(30 - 2x)^2$. b) Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Que vaut-il ?

Exercice 8 ★★★ — Tangentes particulières

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. a) Déterminer les points de la courbe où la tangente est horizontale. b) Déterminer les points où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 9x + 1$.

7. Corrigés détaillés

Exercice 1. a) $f'(x) = 12x^2 - 10x + 2$. b) $g = 3 \times (1/x)$, donc $g'(x) = 3 \times (-1/x^2) = -3/x^2$. c) $h'(x) = 5 \times 1/(2\sqrt{x}) = 5/(2\sqrt{x})$.

Exercice 2. $[(3 + h)^2 - 3^2] / h = (9 + 6h + h^2 - 9) / h = (6h + h^2) / h = 6 + h$. Quand h tend vers 0, ce taux tend vers 6 : $f'(3) = 6$. On retrouve bien $f'(x) = 2x$ en $x = 3$.

Exercice 3. a) $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$; $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. $f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x + 1)/(2\sqrt{x})$. On met au même dénominateur : $2\sqrt{x} = 4x/(2\sqrt{x})$, d'où $f'(x) = (6x + 1)/(2\sqrt{x})$. b) $u(x) = 3x - 1$, $u' = 3$; $v(x) = x + 2$, $v' = 1$. $g'(x) = [3(x + 2) - (3x - 1) \times 1] / (x + 2)^2 = 7/(x + 2)^2$. Comme $7 > 0$ et $(x + 2)^2 > 0$, g est croissante sur $]-2 ; +\infty[$.

Exercice 4. $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$. $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(1) = -2$. Tangente : $y = -2(x - 1) - 2 = -2x + 2 - 2$, soit $y = -2x$.

Exercice 5. a) $f(x) = g(2x - 3)$ avec $g(X) = X^5$: $f'(x) = 2 \times 5(2x - 3)^4 = 10(2x - 3)^4$. b) $g'(x) = 4 \times 1/(2\sqrt{(4x + 1)}) = 2/\sqrt{(4x + 1)}$.

Exercice 6. $f'(x) = 1 - 4/x^2 = (x^2 - 4)/x^2 = (x - 2)(x + 2)/x^2$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$. f est décroissante sur $]0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$. Elle admet un minimum en $x = 2$, égal à $f(2) = 2 + 2 = 4$.

Exercice 7. a) x est une longueur, donc $x > 0$, et il faut $30 - 2x > 0$, soit $x < 15$. La base est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur vaut x : $V(x) = x(30 - 2x)^2$. b) Avec $u(x) = x$ et $v(x) = (30 - 2x)^2$, $v'(x) = -2 \times 2(30 - 2x) = -4(30 - 2x)$. $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$. Sur $]0 ; 15[$, $30 - 2x > 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $30 - 6x$, qui s'annule en $x = 5$ en passant de + à −. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm et vaut $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm³, soit 2 litres.

Exercice 8. $f'(x) = 3x^2 - 3$. a) Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Points : $(1 ; -2)$ et $(-1 ; 2)$. b) Tangente parallèle à $y = 9x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Points : $(2 ; 2)$ et $(-2 ; -2)$, car $f(2) = 8 - 6 = 2$ et $f(-2) = -8 + 6 = -2$.

8. Mémo : la dérivation en 6 points

1. $f'(a)$ est la limite du taux de variation, et le coefficient directeur de la tangente en a.
2. Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. Formules clés : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(1/x)' = -1/x^2$, $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.
4. Produit, quotient, composée affine : nommer u et v, calculer u′ et v′ à part.
5. Le signe de f′ donne les variations de f : on factorise f′ avant d'étudier son signe.
6. Extremum en a : f′ s'annule *et change de signe* en a.

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Youssef, professeur de maths et physique-chimie depuis 12 ans, accompagne les élèves en cours particuliers en ligne, de la 6e à la Terminale.

Premier échange de 20 minutes offert · WhatsApp : +33 6 16 02 20 33 · learning.euniq.pro