CLARIO · FICHE DE COURS ET EXERCICES

Le second degré

Première | Spécialité mathématiques | Cours · Méthodes · 8 exercices corrigés

Le second degré est le premier grand chapitre d'algèbre de la spécialité maths en Première, et il revient partout ensuite : dérivation, suites, probabilités, problèmes d'optimisation... Cette fiche réunit le cours complet, les méthodes à maîtriser, un exemple entièrement corrigé et 8 exercices progressifs avec corrigés détaillés.

Objectifs

- Reconnaître une fonction polynôme du second degré et passer d'une forme à l'autre (développée, canonique, factorisée).
- Résoudre une équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec le discriminant... et savoir quand s'en passer.
- Étudier le signe d'un trinôme et résoudre une inéquation du second degré.
- Lire et tracer une parabole : sommet, axe de symétrie, variations.
- Modéliser un problème concret par une équation du second degré.

Prérequis

- Développer et factoriser, identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- Résoudre une équation produit nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Dresser le tableau de signes d'un produit de facteurs du premier degré.
- Connaître la fonction carré et sa courbe (Seconde).

1. Le cours

1.1 Définition

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou trinôme) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, où a, b et c sont des réels avec $\mathbf{a \neq 0}$. C'est la *forme développée* de f.

Exemples : $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ ($a = 2$, $b = -4$, $c = -6$) ; $g(x) = -x^2 + 5$ ($a = -1$, $b = 0$, $c = 5$). En revanche, $h(x) = 3x + 1$ n'est pas du second degré, car $a = 0$.

1.2 Forme canonique

Propriété. Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$, avec $\boldsymbol{\alpha = -b / (2a)}$ et $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$.

Démonstration. Comme $a \neq 0$, on factorise par a : $f(x) = a[x^2 + (b/a)x + c/a]$. Or $x^2 + (b/a)x$ est le début du carré $(x + b/(2a))^2 = x^2 + (b/a)x + b^2/(4a^2)$. Donc :

$$f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a^2) + c/a] = a[(x + b/(2a))^2 - (b^2 - 4ac)/(4a^2)]$$

En développant le crochet, on obtient bien $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -b/(2a)$. Et en remplaçant x par α, le carré s'annule : $f(\alpha) = \beta$.

1.3 Le discriminant et les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

Définition. Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

La démonstration précédente donne $f(x) = a[(x - \alpha)^2 - \Delta/(4a^2)]$. Comme $a \neq 0$, résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre $(x - \alpha)^2 = \Delta/(4a^2)$. Un carré étant toujours positif ou nul, tout dépend du signe de Δ :

- **Si $\Delta > 0$** : l'équation a deux solutions distinctes, $\boldsymbol{x_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / (2a)}$ et $\boldsymbol{x_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / (2a)}$.
- **Si $\Delta = 0$** : l'équation a une seule solution (dite double), $\boldsymbol{x_0 = -b / (2a)}$.
- **Si $\Delta < 0$** : l'équation n'a **aucune solution réelle**.

1.4 Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.
- Si $\Delta = 0$: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$.
- Si $\Delta < 0$: f ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré.

1.5 Somme et produit des racines

Lorsque $\Delta \geq 0$, les racines vérifient $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b/a}$ et $\boldsymbol{x_1 \times x_2 = c/a}$. En développant $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a \cdot x_1 x_2$, et en identifiant avec $ax^2 + bx + c$, on retrouve ces deux formules. Elles sont très utiles quand on connaît déjà une racine.

1.6 Signe d'un trinôme

Règle à retenir : un trinôme est **du signe de a**, sauf **entre ses racines** (lorsqu'il en a deux), où il est du signe opposé.

- $\Delta > 0$: signe de a à l'extérieur de $[x_1 ; x_2]$, signe de $-a$ entre x_1 et x_2, nul en x_1 et x_2.
- $\Delta = 0$: signe de a partout, nul en x_0.
- $\Delta < 0$: signe de a pour tout réel x, jamais nul.

1.7 Variations et parabole

La courbe d'un trinôme est une **parabole** de **sommet $S(\alpha ; \beta)$** et d'**axe de symétrie la droite $x = \alpha$**.

- Si **$a > 0$** : la parabole est « tournée vers le haut ». f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$, croissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et admet un **minimum β** atteint en α.
- Si **$a < 0$** : la parabole est « tournée vers le bas ». f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et admet un **maximum β** atteint en α.

Les racines, quand elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses. Elles sont symétriques par rapport à α : $\alpha = (x_1 + x_2)/2$.

2. Les formules à connaître

- Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$
- Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
- $\Delta > 0$: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $\Delta = 0$: $x_0 = -b/(2a)$ et $f(x) = a(x - x_0)^2$
- Somme et produit : $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 x_2 = c/a$
- Sommet de la parabole : $S(\alpha ; \beta)$, axe $x = \alpha$

3. Les méthodes à maîtriser

Méthode 1 — Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ avec le discriminant

1. Écrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (tout à gauche, 0 à droite).
2. Identifier a, b et c *avec leur signe*.
3. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. Conclure selon le signe de Δ et écrire l'ensemble des solutions $S = \{...\}$.

Méthode 2 — Savoir se passer du discriminant

Le discriminant fonctionne toujours, mais il est souvent plus rapide de s'en passer :

- **c = 0** : on factorise par x. Ex. : $3x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 7) = 0$.
- **b = 0** : on isole x^2. Ex. : $5x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
- **Identité remarquable** : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
- **Racine évidente** : on teste 1, −1, 2… puis on trouve l'autre racine avec le produit c/a.

Méthode 3 — Résoudre une inéquation du second degré

1. Tout ramener à gauche : $ax^2 + bx + c > 0$ (ou $<$, $\geq$, $\leq$).
2. Chercher les racines du trinôme (Δ ou méthode rapide).
3. Appliquer la règle du signe : signe de a à l'extérieur des racines.
4. Lire la réponse sous forme d'intervalle(s), en faisant attention aux crochets : ils sont fermés pour $\geq$ ou $\leq$, ouverts pour $>$ ou $<$.

Méthode 4 — Trouver la forme canonique rapidement

Calculer $\alpha = -b/(2a)$, puis $\beta = f(\alpha)$, et écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Vérifier en redéveloppant : c'est rapide et cela évite de perdre des points.

4. Exemple entièrement corrigé

Énoncé. On considère $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Donner la forme factorisée, puis la forme canonique de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre $f(x) \leq 0$.

1. Résolution. On identifie $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$. Alors $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$. Comme $\Delta > 0$ et $\sqrt{64} = 8$, il y a deux solutions :

$$x_1 = (4 - 8)/(2 \times 2) = -4/4 = -1 \text{ et } x_2 = (4 + 8)/4 = 12/4 = 3$$

Vérification : f(−1) = 2 + 4 − 6 = 0 et f(3) = 18 − 12 − 6 = 0. Donc **S = {−1 ; 3}**.

2. Formes. Forme factorisée : f(x) = 2(x + 1)(x − 3). Pour la forme canonique : α = −(−4)/(2 × 2) = 1 et β = f(1) = 2 − 4 − 6 = −8, donc **f(x) = 2(x − 1)² − 8**. Vérification : 2(x² − 2x + 1) − 8 = 2x² − 4x − 6. ✓

3. Variations. a = 2 > 0 : f est décroissante sur]−∞ ; 1] et croissante sur [1 ; +∞[. Son minimum vaut −8, atteint en x = 1. La parabole a pour sommet S(1 ; −8).

4. Inéquation. f est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines, et négatif entre −1 et 3. L'inégalité étant large, les racines sont incluses : **S = [−1 ; 3]**.

Contrôle de cohérence : α = 1 est bien le milieu de −1 et 3. Toujours vérifier ce genre de détail : il permet de repérer une erreur de calcul.

5. Erreurs fréquentes et pièges

- **Le carré d'un nombre négatif** : avec b = −4, b² = (−4)² = 16 et non −16. À la calculatrice, mettez les parenthèses.
- **Oublier le « − » de −b** dans la formule des racines : si b = −4, alors −b = 4.
- **Oublier a dans la forme factorisée** : 2x² − 4x − 6 = 2(x + 1)(x − 3), pas (x + 1)(x − 3).
- **Diviser par x** pour résoudre 3x² = 7x : on perd la solution x = 0. Il faut factoriser.
- **Écrire x = ±√(−4)** : un carré n'est jamais négatif, l'équation x² = −4 n'a pas de solution.
- **Confondre signe et variations** : « f est positive » ne veut pas dire « f est croissante ».
- **Se tromper de crochets** dans une inéquation stricte : > 0 donne des crochets ouverts sur les racines.

6. Exercices progressifs

★ application directe · ★★ entraînement · ★★★ approfondissement / type épreuve

Exercice 1 ★ — Avec le discriminant

Résoudre dans ℝ : a) x² − 5x + 6 = 0 ; b) 3x² + 2x + 1 = 0 ; c) 4x² − 12x + 9 = 0.

Exercice 2 ★ — Sans le discriminant

Résoudre dans ℝ, sans calculer Δ : a) 5x² − 20 = 0 ; b) 3x² + 7x = 0 ; c) x² + 6x + 9 = 0.

Exercice 3 ★★ — Forme canonique et variations

Soit g(x) = −x² + 6x − 5. a) Déterminer la forme canonique de g. b) En déduire les variations de g et son extremum. c) Résoudre g(x) = 0 à l'aide de la forme canonique.

Exercice 4 ★★ — Inéquation

Résoudre dans ℝ l'inéquation −2x² + x + 3 > 0.

Exercice 5 ★★ — Racine évidente

Vérifier que 1 est solution de 2x² − 7x + 5 = 0, puis trouver l'autre solution sans calculer Δ.

Exercice 6 ★★★ — Problème de géométrie

Un rectangle a un périmètre de 20 cm et une aire de 21 cm². Déterminer ses dimensions.

Exercice 7 ★★★ — Équation avec paramètre

Pour quelles valeurs du réel m l'équation $x^2 + mx + 4 = 0$ admet-elle une unique solution ? Préciser cette solution dans chaque cas.

Exercice 8 ★★★ — Optimisation d'un bénéfice

Une entreprise fabrique entre 0 et 100 objets par jour. Son bénéfice, en euros, pour x objets vendus est $B(x) = -x^2 + 120x - 2000$. a) Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Que vaut-il ? b) Pour quelles productions l'entreprise est-elle rentable ($B(x) \geq 0$) ?

7. Corrigés détaillés

Exercice 1. a) $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 1$: $x_1 = (5 - 1)/2 = 2$ et $x_2 = (5 + 1)/2 = 3$. $S = \{2 ; 3\}$. b) $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$: $S = \varnothing$. c) $\Delta = 144 - 144 = 0$: $x_0 = 12/8 = 3/2$. $S = \{3/2\}$. On remarque d'ailleurs que $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Exercice 2. a) $5x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. b) $x(3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7/3$. c) $(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Exercice 3. a) $a = -1$, $b = 6$: $\alpha = -6/(-2) = 3$ et $\beta = g(3) = -9 + 18 - 5 = 4$. Donc $g(x) = -(x - 3)^2 + 4$. b) $a < 0$: g est croissante sur $]-\infty ; 3]$, décroissante sur $[3 ; +\infty[$, avec un maximum égal à 4 en $x = 3$. c) $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 1$. Vérification : $g(1) = -1 + 6 - 5 = 0$. ✓

Exercice 4. $a = -2$, $b = 1$, $c = 3$: $\Delta = 1 + 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$. Racines : $(-1 - 5)/(-4) = 3/2$ et $(-1 + 5)/(-4) = -1$. Comme $a < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles. Inégalité stricte : $S =]-1 ; 3/2[$. Contrôle : pour $x = 0$, $-2 \times 0 + 0 + 3 = 3 > 0$, et 0 est bien dans l'intervalle. ✓

Exercice 5. $2 \times 1^2 - 7 \times 1 + 5 = 0$, donc 1 est solution. Le produit des racines vaut $c/a = 5/2$, donc l'autre racine est $x_2 = (5/2)/1 = 5/2$. $S = \{1 ; 5/2\}$.

Exercice 6. Notons x et y les dimensions (en cm). Alors $2(x + y) = 20$, donc $x + y = 10$, et $xy = 21$. Les nombres x et y ont pour somme 10 et pour produit 21 : ils sont solutions de $X^2 - 10X + 21 = 0$. $\Delta = 100 - 84 = 16$, d'où $X = (10 - 4)/2 = 3$ ou $X = (10 + 4)/2 = 7$. Le rectangle mesure 7 cm sur 3 cm. Vérification : périmètre $2 \times 10 = 20$, aire 21. ✓

Exercice 7. L'équation admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$, soit $m^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire $m = 4$ ou $m = -4$. La solution est alors $x_0 = -m/2$: pour $m = 4$, $x_0 = -2$; pour $m = -4$, $x_0 = 2$. (Pour aller plus loin : deux solutions si $m < -4$ ou $m > 4$, aucune si $-4 < m < 4$.)

Exercice 8. a) $a = -1 < 0$: B admet un maximum en $\alpha = -120/(-2) = 60$, qui vaut $B(60) = -3600 + 7200 - 2000 = 1600$. Le bénéfice est maximal pour 60 objets et vaut 1 600 €. b) $\Delta = 120^2 - 4 \times (-1) \times (-2000) = 14\,400 - 8\,000 = 6\,400$, $\sqrt{\Delta} = 80$. Racines : $(-120 + 80)/(-2) = 20$ et $(-120 - 80)/(-2) = 100$. Comme $a < 0$, $B(x) \geq 0$ entre les racines : l'entreprise est rentable pour une production comprise entre 20 et 100 objets, soit $x \in [20 ; 100]$.

8. Mémo : le second degré en 6 points

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; trois formes : développée, canonique, factorisée.
2. Sommet $S(\alpha ; \beta)$ avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$.
3. $\Delta = b^2 - 4ac$ décide du nombre de racines : 2, 1 ou 0.
4. Avant de calculer Δ, chercher un raccourci : $c = 0$, $b = 0$, identité remarquable, racine évidente.
5. Signe : celui de a, sauf entre les racines.
6. Toujours vérifier : remplacer une racine dans l'équation, redévelopper la forme canonique.

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Youssef, professeur de maths et physique-chimie depuis 12 ans, accompagne les élèves en cours particuliers en ligne, de la 6e à la Terminale.

Premier échange de 20 minutes offert · WhatsApp : +33 6 16 02 20 33 · learning.euniq.pro